El teorema de Cayley

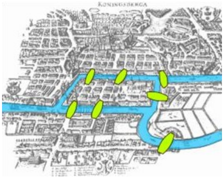
Kevin Gerardo Messina Rodríguez   O'Bryan Cárdenas-Andaur

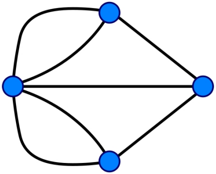
Pares Ordenados, edición primavera 2024

7 de junio de 2024

Algo de historia

Sobre los 7 puentes del río Pregel, en Königsberg, nacería una de las ramas de las matemáticas, cuando la gente comenzó a preguntarse "¿Se pueden cruzar los 7 puentes de forma que solo se pueda pasar una única vez por cada uno de ellos?",Euler al notar el interés y el reto que esto suponía intentó resolver la pregunta, su técnica ejemplificar las zonas de tierra con puntos y los puentes por lineas , este problema se redució a *recorrer una gráfica*. y se concluyó que era imposible hacer este recorrido

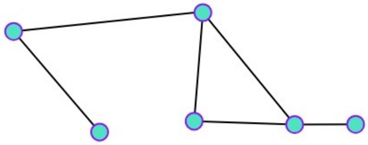




Definiciones preliminares

Gráfica

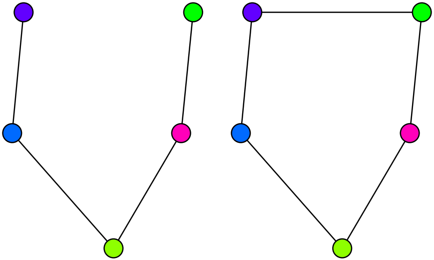
Una **gráfica** $G = (V, E)$ finita es un par ordenado formado por un conjunto finito y no vacío $V = V(G)$ y un conjunto $E = E(G) \subset V \times V$. A los elementos de V se les llama **vértices** y a los de E **aristas**.



Definiciones preliminares

Gráfica

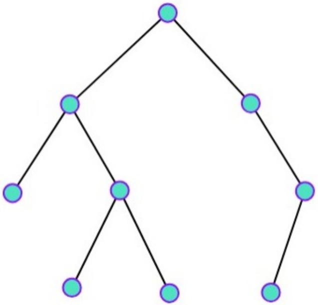
- Un **camino** en una gráfica $G = (V, E)$ es una secuencia de vértices $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ tal que $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ para todo $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$.
- Un camino se dice **simple** si todos sus vértices son distintos, es decir, $v_i \neq v_j$ para todo $i \neq j$.
- Un **ciclo** en una gráfica es un camino simple que empieza y termina en el mismo vértice.



Definiciones preliminares

Gráfica

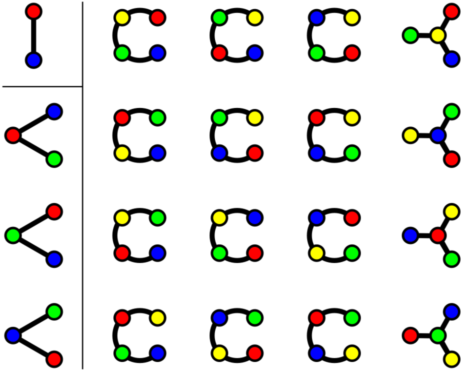
- Una gráfica G se dice **conexa** si existe un camino entre cualquier par de vértices.
- Una gráfica conexa sin ciclos, es llamada **árbol**. A sus vértices de grado 1 se le denominan hojas. En varias situaciones es importante distinguir una hoja a la que se le denomina raíz.



El teorema de Cayley

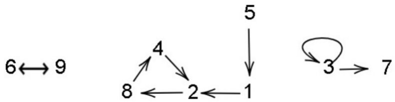
Teorema sobre árboles

El número de árboles con n vértices etiquetados es n^{n-2}.



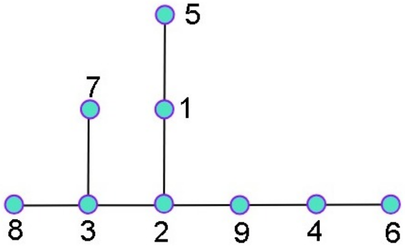
Idea de la demostración constructiva

Para ilustrar la construcción, sea $n = 9$ y la función $f : (9) \to (9)$ definida por $f(1) = 2$, $f(2) = 8$, $f(3) = 3$, $f(4) = 2$, $f(5) = 1$, $f(6) = 9$, $f(7) = 3$, $f(8) = 4$, $f = (9) = 6$. La gráfica dirigida que representa f es:



Idea de la demostración contructiva

Los elementos en algún ciclo dirigido son $2 < 3 < 4 < 6 < 8 < 9$, y sus imágenes son, en orden: 8,3,2,9,4,6. Entonces el árbol con vértices distinguidos (I, F) que se asigna a f es:



Los elementos en algún ciclo dirigido son $2 < 3 < 4 < 6 < 8 < 9$, y sus imágenes son, en orden: 8,3,2,9,4,6.

MUCHAS GRACIAS!